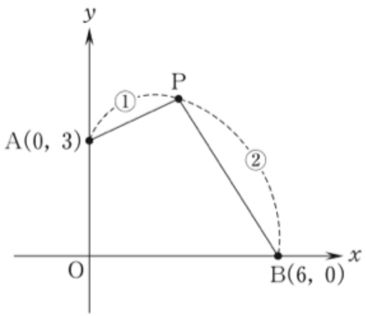
(1)　2 点 A(0, 3), B(6, 0) に対して，AP:BP＝1:2 であるような点 P の軌跡を求めよ．

(2)　点 (0, 1) からの距離と直線 $y=-1$ からの距離が等しくなるような点 Q の軌跡を求めよ．

(1)



P(X, Y) とおくと，AP:BP＝1:2 より，

$\mathrm{BP}^2=4\mathrm{AP}^2$ であるから，

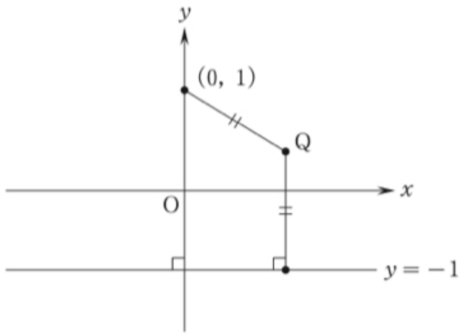
$$(X-6)^2+Y^2=4\{X^2+(Y-3)^2\}.$$

$$X^2+Y^2+4X-8Y=0.$$

よって，求める点 P の軌跡は，

円：$(x+2)^2+(y-4)^2=20$.

(2)



Q(X, Y) とおくと，点 (0, 1) と Q の距離と Q と直線 $y=-1$ の距離が等しいので，

$$\sqrt{X^2+(Y-1)^2}=|Y-(-1)|.$$

したがって，

$$X^2+(Y-1)^2=(Y+1)^2.$$

$$Y=\frac{1}{4}X^2.$$

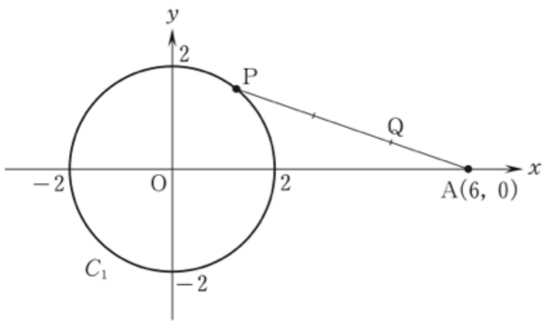
よって，求める点 Q の軌跡は，

放物線：$y=\frac{1}{4}x^2$.

(1)　xy 平面上に円 $C_1: x^2+y^2=4$ と点 A(6, 0) がある．点 P が C_1 上を動くとき，線分 AP を 1:2 に内分する点 Q の軌跡を求めよ．

(2)　xy 平面上の放物線 $C_2: y=x^2-4tx+2t^2+3t-1$ の頂点を R とする．C_2 が x 軸と異なる 2 点で交わるような範囲で t が動くとき，R の軌跡を求めよ．

(1)



C_1 上の点 $\mathrm{P}(u,\ v)$ は，

$$u^2+v^2=4 \qquad \cdots ①$$

を満たす．

$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{12+u}{3}, \\ Y=\dfrac{0+v}{3} \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} u=3X-12, \\ v=3Y. \end{cases}$$

これらを ① に代入して，

$$(3X-12)^2+(3Y)^2=4.$$

$$(X-4)^2+Y^2=\frac{4}{9}.$$

よって，求める点 Q の軌跡は，

$$\textbf{円}:(x-4)^2+y^2=\frac{4}{9}.$$

(2)　$C_2: y=x^2-4tx+2t^2+3t-1$ より，

$$y=(x-2t)^2-2t^2+3t-1.$$

C_2 は x 軸と異なる 2 点で交わるので，

$$-2t^2+3t-1<0.$$

$$(2t-1)(t-1)>0.$$

$$t<\frac{1}{2},\quad t>1. \qquad \cdots ②$$

一方，$\mathrm{R}(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=2t, & \cdots ③ \\ Y=-2t^2+3t-1. & \cdots ④ \end{cases}$$

③ より $t=\dfrac{X}{2}$ であり，これを ②，④ に代入して，

$$\begin{cases} Y=-2\left(\dfrac{X}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{X}{2}\right)-1, \\ \dfrac{X}{2}<\dfrac{1}{2},\ \dfrac{X}{2}>1 \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} Y=-\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{3}{2}X-1, \\ X<1,\ X>2. \end{cases}$$

よって，求める点 R の軌跡は，

放物線：$y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x-1$ **の**

$x<1,\ x>2$ **の部分．**

xy 平面上で，放物線 $C: y=x^2-2x+3$ と，点 $(3,\ 2)$ を通る傾き m の直線 l が異なる 2 点 P，Q で交わっている．

(1) m のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) m が(1)の範囲で変化するとき，線分 PQ の中点 R の軌跡を求めよ．

$$C: y=x^2-2x+3. \qquad \cdots ①$$

$$l: y=m(x-3)+2. \qquad \cdots ②$$

(1) C，l が異なる 2 点で交わるのは，①，② から，y を消去して得られる x の 2 次方程式

$$x^2-2x+3=m(x-3)+2$$

すなわち，

$$x^2-(m+2)x+3m+1=0 \qquad \cdots ③$$

が異なる 2 つの実数解をもつときである．

③ の判別式を D とすると，

$$D=(m+2)^2-4(3m+1)$$
$$=m(m-8).$$

$D>0$ より，

$$\boldsymbol{m<0,\quad 8<m.} \qquad \cdots ④$$

(2) 2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とおくと，α，β は，③ の異なる実数解である．

線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{cases} X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{m+2}{2}, & \cdots ⑤ \\ Y=m(X-3)+2. & \cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤ から，$m=2X-2$ として ⑥ に代入して，

$$Y=(2X-2)(X-3)+2$$
$$=2X^2-8X+8.$$

また，④，⑤ より，

$$X<1,\quad 5<X.$$

よって，求める点 R の軌跡は，

放物線：$\boldsymbol{y=2x^2-8x+8}$ の $\boldsymbol{x<1}$，$\boldsymbol{5<x}$ の部分．

xy 平面上に，2 直線

$$l:(1-k)x+(k+1)y+k-1=0,$$
$$m:x+ky+1=0$$

がある．k がすべての実数をとるとき，l と m の交点の軌跡を求め，図示せよ．

l, m の交点を $(X,\ Y)$ とおくと，

$$(1-k)X+(k+1)Y+k-1=0. \qquad \cdots ①$$
$$X+kY+1=0. \qquad \cdots ②$$

(ア) $Y=0$ のとき．

② より，

$$X=-1.$$

$(X,\ Y)=(-1,\ 0)$ を ① に代入すると，

$$2k-2=0 \text{ より}, k=1.$$

よって，$k=1$ のときに，l, m は $(x,\ y)=(-1,\ 0)$ を交点にもつので，点 $(-1,\ 0)$ は求める軌跡に含まれる．

(イ) $Y\neq 0$ のとき．

② より，

$$k=\frac{-X-1}{Y}.$$

これを，① を k について整理した式に代入すると，

$$X+Y-1+\left(\frac{-X-1}{Y}\right)(-X+Y+1)=0.$$

両辺に Y $(\neq 0)$ をかけて，整理すると，

$$X^2+Y^2-2Y-1=0. \ (Y\neq 0)$$
$$X^2+(Y-1)^2=2,\ \text{かつ}\ \ (X,\ Y)\neq(\pm 1,\ 0).$$

以上，(ア), (イ) をまとめると，求める交点の軌跡は，

円：$x^2+(y-1)^2=2$,

ただし，点 $(1,\ 0)$ を除く．

これを図示すると次図になる．