k は実数の定数とする．xy 平面上に，2 直線

$$l:(k+2)x-(k-1)y-k-5=0,$$
$$m:x+2y-9=0$$

がある．

(1) 直線 l は k の値にかかわらず定点 A を通る．A の座標を求めよ．

(2) 2 直線 l, m が平行となる k の値，垂直となる k の値をそれぞれ求めよ．

(3) 2 直線 l, m が平行となるとき，2 直線間の距離を求めよ．

$$l:(k+2)x-(k-1)y-k-5=0.$$
$$m:x+2y-9=0.$$

(1) l の方程式を k について整理すると，

$$(x-y-1)k+2x+y-5=0.$$

求める点を $\mathrm{A}(a,\ b)$ とすると，

$$(a-b-1)k+2a+b-5=0.$$

これが，すべての k で成り立つ条件は，

$$\begin{cases} a-b-1=0, \\ 2a+b-5=0. \end{cases}$$

これより，

$$a=2, \quad b=1.$$

よって，直線 l は k の値にかかわらず

定点 A(2, 1)

を通る．

(2) l, m が平行になる条件は，

$$(k+2)\cdot 2+(k-1)\cdot 1=0$$

より，

$$\boldsymbol{k=-1}.$$

l, m が垂直になる条件は，

$$(k+2)\cdot 1-(k-1)\cdot 2=0$$

より，

$$\boldsymbol{k=4}.$$

(3) 2 直線 l, m が平行となるとき，その 2 直線間の距離は，l 上の点 A(2, 1) と m の距離 d である．

よって，

$$d=\frac{|2+2\cdot 1-9|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\boldsymbol{\sqrt{5}}.$$

xy 平面上の 3 直線

$$3x+4y-1=0,\quad 2x-y-8=0,\quad 2x-ay+3=0$$

によって三角形ができるような a の値の範囲を求めよ．

$$l_1: 3x+4y-1=0,$$
$$l_2: 2x-y-8=0,$$
$$l_3: 2x-ay+3=0$$

とする．

l_1, l_2, l_3 で三角形ができない条件は，

・平行な直線の組がある，

または

・3 直線が 1 点で交わる

である．

l_1 と l_2 は交点が $(3,\ -2)$ となることに注意すると，l_1, l_2, l_3 で三角形ができないのは，次の 3 つの場合がある．

(ア) $l_1 /\!/ l_3$ のとき．

$$3\cdot(-a)-4\cdot2=0$$

より，

$$a=-\frac{8}{3}.$$

(イ) $l_2 /\!/ l_3$ のとき．

$$2\cdot(-a)-(-1)\cdot2=0$$

より，

$$a=1.$$

(ウ) l_3 が $(3,\ -2)$ を通るとき．

$$2\cdot3-a\cdot(-2)+3=0$$

より，

$$a=-\frac{9}{2}.$$

以上より，求める a の条件は，

$$a\neq-\frac{9}{2}\quad かつ\quad a\neq-\frac{8}{3}\quad かつ\quad a\neq1,$$

すなわち，

$$\boldsymbol{a<-\frac{9}{2},\quad -\frac{9}{2}<a<-\frac{8}{3},\quad -\frac{8}{3}<a<1,\quad a>1.}$$

点 $(1,\ 2)$ を中心とし，円 $(x-4)^2+(y-6)^2=9$ に接する円の方程式をすべて求めよ．

$A(1,\ 2)$ とし，A を中心とする円を C_1，その半径を r_1 とする．

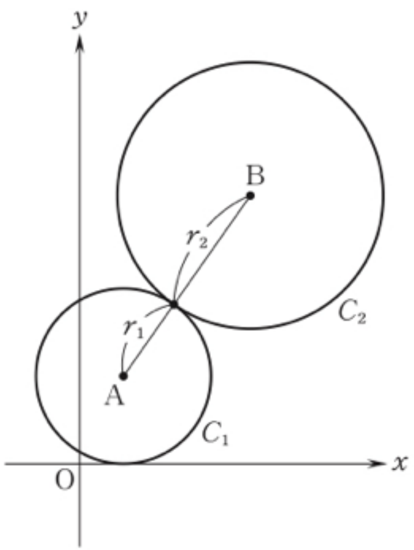
また，円 C_2: $(x-4)^2+(y-6)^2=9$ の中心を B，半径を r_2 とすると，$B(4,\ 6)$，$r_2=3$ であり，

$$AB=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=5.$$

(ア)　C_1 と C_2 が外接するとき，$AB=r_1+r_2$ より，

$$r_1+3=5.$$

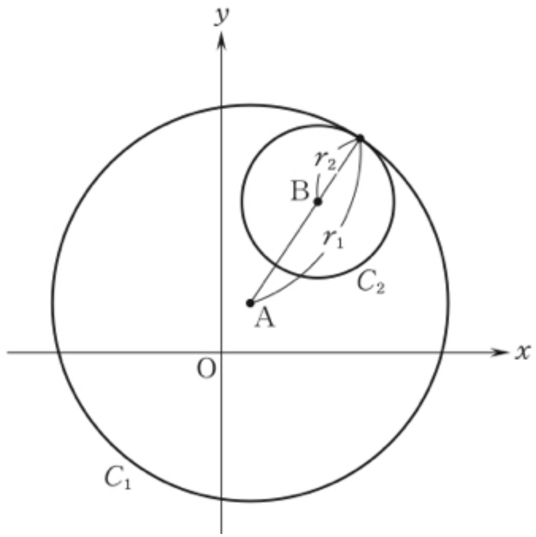
$$r_1=2.$$



(イ)　C_2 が C_1 に内接するとき，$AB=r_1-r_2$ より，

$$r_1-3=5.$$

$$r_1=8.$$



よって，求める円の方程式は，

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2=4,\quad (x-1)^2+(y-2)^2=64.}$$

xy 平面上に円 $C: x^2+y^2-4x+8y=0$ がある.

(1) 点 $(4,\ 2)$ から C に引いた接線の方程式をすべて求めよ.

(2) 点 $(4,\ 2)$ を通る直線 l が C と異なる 2 点で交わり，その 2 点間の距離が $4\sqrt{3}$ であるとき，l の方程式をすべて求めよ.

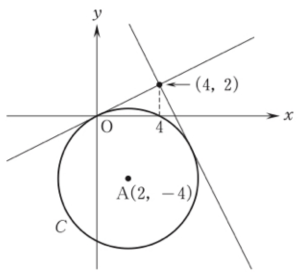
$C: x^2+y^2-4x+8y=0$ を変形して，

$$C: (x-2)^2+(y+4)^2=20.$$

C の中心を A，半径を r とすると，

$$\mathrm{A}(2,\ -4),\quad r=2\sqrt{5}.$$

(1)



点 $(4,\ 2)$ から C に引いた接線は，y 軸に平行でないから，傾きを m として，

$$y=m(x-4)+2,$$

すなわち

$$mx-y-4m+2=0 \qquad \cdots(*)$$

と表せる.

$(*)$ が C と接する条件は，

$$(\text{A と}(*)\text{の距離})=r$$

が成り立つことであるから，

$$\frac{|m\cdot 2-(-4)-4m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}.$$

これより，

$$|-m+3|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}.$$

両辺を 2 乗して，

$$(-m+3)^2=5(m^2+1).$$

$$2m^2+3m-2=0.$$

$$(m+2)(2m-1)=0.$$

$$m=-2,\ \frac{1}{2}.$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y=-2(x-4)+2,\quad y=\frac{1}{2}(x-4)+2,$$

すなわち

$$\boldsymbol{y=-2x+10,\quad y=\frac{1}{2}x.}$$

(2) l が y 軸に平行のとき，l と C は異なる 2 点で交わり，その 2 点間の距離は 8 であるから題意を満たさない.

したがって，l は傾きをもつので，その方程式を

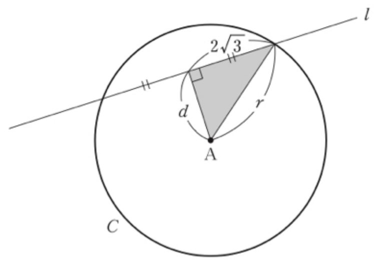
$$y=k(x-4)+2,$$

すなわち

$$l: kx-y-4k+2=0$$

と表せる.

l と A の距離を d とおく.



l が C と異なる 2 点で交わり，その 2 点間の距離が $4\sqrt{3}$ になる条件は，斜辺の長さが r，残りの 2 辺の長さが d，$2\sqrt{3}$ である直角三角形（図の網掛け部分）ができることであるから，

$$d^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2=r^2.$$

$r=2\sqrt{5}$ より，

$$d=2\sqrt{2}.$$

したがって，

$$\frac{|-2k+6|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{2}.$$

これより，

$$(-k+3)^2=2\left(k^2+1\right).$$

$$k^2+6k-7=0.$$

$$(k+7)(k-1)=0.$$

$$k=-7,\ 1.$$

よって，求める l の方程式は，

$$y=-7(x-4)+2,\quad y=(x-4)+2,$$

すなわち

$$\boldsymbol{y=-7x+30,\quad y=x-2.}$$

xy 平面上に

$$円\ C : 4x^2-16x+4y^2+7=0$$

がある．また，2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(5,\ -4)$ を通る直線を l とする．

(1) 直線 l と円 C は共有点をもたないことを示せ．

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値，およびそのときの P の座標を求めよ．

(1) C の方程式より，

$$x^2-4x+y^2+\frac{7}{4}=0.$$

$$(x-2)^2+y^2=\frac{9}{4}. \qquad \cdots ①$$

よって，C は中心 Q$(2,\ 0)$，半径 $\frac{3}{2}$ の円である．

また，l の傾きは

$$\frac{-4-0}{5-(-1)}=-\frac{2}{3}$$

であるから，l の方程式は

$$y=-\frac{2}{3}(x+1),$$

すなわち，

$$2x+3y+2=0.$$

よって，中心 Q$(2,\ 0)$ と l の距離を d とすると，

$$d=\frac{|2\cdot 2+3\cdot 0+2|}{\sqrt{2^2+3^2}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{13}}.$$

ここで，C の半径を $r\ \left(=\frac{3}{2}\right)$ とすると，

$$d^2=\frac{36}{13}=\frac{144}{13\cdot 4},$$

$$r^2=\frac{9}{4}=\frac{117}{13\cdot 4}$$

より，

$$d^2>r^2.$$

d，r は正であるから，

$$d>r.$$

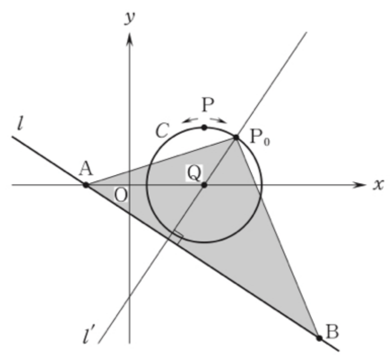
よって，直線 l と円 C は共有点をもたない．

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\sqrt{\{5-(-1)\}^2+(-4-0)^2}\\&=\sqrt{36+16}\\&=2\sqrt{13}\quad (=\text{一定})\end{aligned}$$

であるから，線分 AB を底辺とみると，三角形 ABP の面積を大きくするには高さを大きくすればよい．

Q を通り，l に垂直な直線 l' と C の 2 交点のうち，第 1 象限にある方を P_0 とすると，P が P_0 に一致するときに高さが最大となり，そのとき三角形 ABP の面積も最大となる．



P が P_0 に一致するとき，高さは $d+r$ であるから，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABP}_0&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot(d+r)\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{13}\left(\frac{6}{\sqrt{13}}+\frac{3}{2}\right)\\&=6+\frac{3}{2}\sqrt{13}.\end{aligned}$$

よって，求める最大値は

$$\mathbf{6+\frac{3}{2}\sqrt{13}.}$$

次に，P_0 の座標を求める．

直線 l' は傾きが $\frac{3}{2}$ で，点 Q を通るから，その方程式は

$$y=\frac{3}{2}(x-2). \qquad \cdots ②$$

①，② から y を消去して，

$$(x-2)^2+\frac{9}{4}(x-2)^2=\frac{9}{4}.$$

$$\frac{13}{4}(x-2)^2=\frac{9}{4}.$$

$$(x-2)^2=\frac{9}{13}.$$

これより，$x-2=\pm\frac{3}{\sqrt{13}}$ となるから，

$$x=2\pm\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

図より，P_0 の x 座標はこのうちの大きい方であるから，

$$x=2+\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

これを ② に代入して

$$\begin{aligned}y&=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\\&=\frac{9\sqrt{13}}{26}.\end{aligned}$$

よって，面積が最大となるときの P の座標は

$$\left(\mathbf{2+\frac{3\sqrt{13}}{13},\ \frac{9\sqrt{13}}{26}}\right).$$