次の式を計算せよ．

(1) $\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{-27}$

(2) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^4\times\sqrt[6]{a^5}\div\sqrt[6]{a}$ （a は正の定数）

(3) $4^{\frac{2}{3}}\div 24^{\frac{1}{3}}\times 18^{\frac{2}{3}}$

(4) $8^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$

(1)
$$\begin{aligned}&\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{-27}\\&=\sqrt[4]{3^4}+\sqrt[3]{(-3)^3}\\&=3+(-3)\\&=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\left(\sqrt[3]{a}\right)^4\times\sqrt[6]{a^5}\div\sqrt[6]{a}\\&=a^{\frac{4}{3}}\times a^{\frac{5}{6}}\div a^{\frac{1}{6}}\\&=a^{\frac{4}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{6}}\\&=\boldsymbol{a}^{2}.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&4^{\frac{2}{3}}\div 24^{\frac{1}{3}}\times 18^{\frac{2}{3}}\\&=\left(2^2\right)^{\frac{2}{3}}\div\left(2^3\cdot 3\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(2\cdot 3^2\right)^{\frac{2}{3}}\\&=2^{\frac{4}{3}}\div\left(2\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)\times 2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{4}{3}}\\&=2^{\frac{4}{3}-1+\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}\\&=2^1\cdot 3^1\\&=\mathbf{6}.\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&8^{-\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}\\&=\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(3^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}}\\&=2^{-2}+3^1\\&=\frac{1}{4}+3\\&=\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}}.\end{aligned}$$

次の方程式，不等式を解け．

(1) $8^{2x-1}=4\sqrt{2}$

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x-5}\geqq\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x}$

(3) $a^x>\sqrt[4]{a}\cdot a^{2x}$ （a は正の定数）

(1)

$$8^{2x-1}=4\sqrt{2}.$$

$$\left(2^3\right)^{2x-1}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}.$$

$$2^{6x-3}=2^{\frac{5}{2}}.$$

よって，

$$6x-3=\frac{5}{2}.$$

$$x=\mathbf{\frac{11}{12}}.$$

(2)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-5}\geqq\left(\frac{1}{9}\right)^{x}.$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-5}\geqq\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right\}^{x}.$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-5}\geqq\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}.$$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから，

$$3x-5\leqq 2x.$$

$$\boldsymbol{x\leqq 5}.$$

(3)

$$a^x>\sqrt[4]{a}\cdot a^{2x}.$$

$$a^x>a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{2x}.$$

$$a^x>a^{2x+\frac{1}{4}}. \qquad \cdots(*)$$

(ア) $a>1$ のとき．

(*) より，

$$x>2x+\frac{1}{4}.$$

$$x<-\frac{1}{4}.$$

(イ) $0<a<1$ のとき．

(*) より，

$$x<2x+\frac{1}{4}.$$

$$x>-\frac{1}{4}.$$

(ア)，(イ) より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x<-\dfrac{1}{4}} \ \textbf{（}\boldsymbol{a>1}\ \textbf{のとき），} \\ \boldsymbol{x>-\dfrac{1}{4}} \ \textbf{（}\boldsymbol{0<a<1}\ \textbf{のとき）．} \end{cases}$$

(1)　$a=\dfrac{2}{3}$ に対して，$b=a^a$ とするとき，$2^a a^a$ と $2^b a^b$ の大小を比較せよ．

(2)　a を 1 でない正の定数とするとき，不等式

$$a^{2x}+a^{x-1}<a^{x+2}+a$$

を解け．

(1)　$b=a^a$ のとき，

$$2^a a^a=(2a)^a,$$
$$2^b a^b=(2a)^b=(2a)^{a^a}.$$

$a=\dfrac{2}{3}$ より，

$$a<1.$$

$0<a<1$ に注意して，

$$a^a>a^1.$$

$2a=\dfrac{4}{3}>1$ に注意して，

$$(2a)^{a^a}>(2a)^{a^1}.$$

よって，

$$\boldsymbol{2^b a^b>2^a a^a}.$$

(2)　$a^{2x}+a^{x-1}<a^{x+2}+a$ より，

$$\left(a^x\right)^2+\frac{1}{a}a^x<a^x\cdot a^2+a.$$

$a>0$ より，

$$a\left(a^x\right)^2+a^x<a^x\cdot a^3+a^2.$$

$a^x=t$ とおくと，

$$at^2+t<a^3t+a^2.$$
$$at^2+\left(1-a^3\right)t-a^2<0.$$
$$(at+1)\left(t-a^2\right)<0.$$

$at+1>0$ であるから，両辺を $at+1$ で割って，

$$t-a^2<0.$$
$$a^x<a^2.$$

これより，与えられた不等式の解は，

$$\begin{cases}\boldsymbol{x<2}\ \ (\boldsymbol{a>1}\ \textbf{のとき}),\\ \boldsymbol{x>2}\ \ (\boldsymbol{0<a<1}\ \textbf{のとき}).\end{cases}$$

関数 $f(x)=9^x+9^{-x}+2\cdot3^x+2\cdot3^{-x}$ について，次の問に答えよ．

(1)　$t=3^x+3^{-x}$ とおくとき，$f(x)$ を t を用いて表せ．

(2)　$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

$$f(x)=9^x+9^{-x}+2\cdot3^x+2\cdot3^{-x}.$$

(1)　$t=3^x+3^{-x}$ とおくと，

$$9^x+9^{-x}=\left(3^x+3^{-x}\right)^2-2\cdot3^x\cdot3^{-x}=t^2-2,$$

$$2\cdot3^x+2\cdot3^{-x}=2\left(3^x+3^{-x}\right)=2t$$

より，

$$f(x)=\left(t^2-2\right)+2t$$
$$=\boldsymbol{t^2+2t-2}.$$

(2)
$$g(t)=t^2+2t-2$$

とおくと，

$$g(t)=(t+1)^2-3.$$

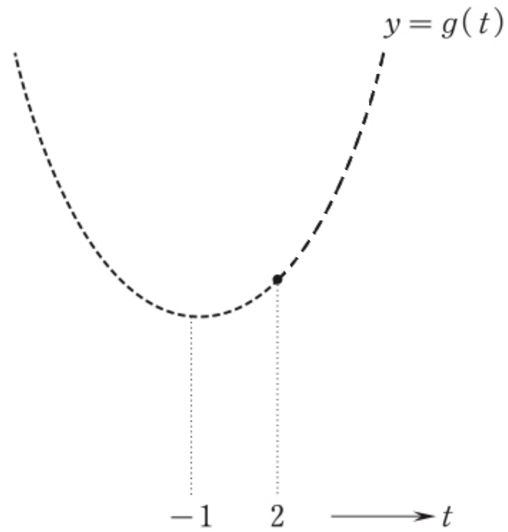
ここで，$3^x>0$，$3^{-x}>0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係から，

$$t=3^x+3^{-x}\geqq2\sqrt{3^x\cdot3^{-x}}=2,$$

すなわち

$$t\geqq2.$$

（等号は $3^x=3^{-x}$，すなわち $x=0$ のときに成立する．）



これより，$g(t)$ の最小値は

$$g(2)=6.$$

よって，$f(x)$ の最小値は

$$\mathbf{6}$$

であり，そのときの x の値は

$$x=\mathbf{0}.$$

次の方程式を解け．

(1)　$\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=3$

(2)　$(\log_2 x)^2-3\log_2 x^2-7=0$

(1)
$$\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=3.$$
真数の条件より，
$$x+1>0 \quad \text{かつ} \quad x-1>0,$$
すなわち，
$$x>1. \qquad \cdots ①$$
このとき，
$$\log_2(x+1)(x-1)=\log_2 8.$$
$$(x+1)(x-1)=8.$$
$$x^2=9.$$
① より，
$$x=\mathbf{3}.$$

(2)
$$(\log_2 x)^2-3\log_2 x^2-7=0.$$
真数の条件より，
$$x>0 \quad \text{かつ} \quad x^2>0,$$
すなわち
$$x>0. \qquad \cdots ②$$
$t=\log_2 x$ とおくと，
$$t^2-6t-7=0.$$
$$(t-7)(t+1)=0.$$
$$t=-1,\ 7.$$
よって，
$$\log_2 x=-1,\ 7.$$
$$x=\mathbf{\frac{1}{2},\ 128}.$$
（これらは ② を満たす.）

次の不等式を解け．

(1)　$4\log_{\frac{1}{4}}(x-4)+\log_2(x-2)>0$

(2)　$\log_a 4x \geqq 2\log_a(3-x)$　（a は1でない正の定数）

(1)　$$4\log_{\frac{1}{4}}(x-4)+\log_2(x-2)>0.$$

真数は正であるから，

$$x-4>0 \quad \text{かつ} \quad x-2>0,$$

すなわち

$$x>4. \qquad \cdots ①$$

このとき，

$$4\cdot\frac{\log_2(x-4)}{\log_2\frac{1}{4}}+\log_2(x-2)>0.$$

$$-2\log_2(x-4)+\log_2(x-2)>0.$$

$$\log_2(x-2)>\log_2(x-4)^2.$$

底2は1より大きいから，

$$x-2>(x-4)^2.$$

$$(x-3)(x-6)<0.$$

$$3<x<6.$$

①より，

$$\boldsymbol{4<x<6.}$$

(2)　$$\log_a 4x \geqq 2\log_a(3-x).$$

真数は正であるから，

$$4x>0 \quad \text{かつ} \quad 3-x>0,$$

すなわち

$$0<x<3. \qquad \cdots ②$$

このとき，

$$\log_a 4x \geqq \log_a(3-x)^2.$$

(ア)　$a>1$ のとき．

$$4x \geqq (3-x)^2.$$

$$(x-1)(x-9) \leqq 0.$$

$$1 \leqq x \leqq 9.$$

②より，

$$1 \leqq x < 3.$$

(イ)　$0<a<1$ のとき．

$$4x \leqq (3-x)^2.$$

$$x \leqq 1, \quad 9 \leqq x.$$

②より，

$$0<x \leqq 1.$$

以上より，求める解は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{1 \leqq x < 3} & \textbf{（}\boldsymbol{a>1}\textbf{ のとき），} \\ \boldsymbol{0 < x \leqq 1} & \textbf{（}\boldsymbol{0<a<1}\textbf{ のとき）.} \end{cases}$$

$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする．

(1) n を正の整数とする．15^n が 45 桁の整数となるような n を求めよ．さらにこのとき，15^n の最高位の数字を求めよ．

(2) 15^{-20} を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．また，その数字は何か．

(1) 15^n が 45 桁の整数となることより，

$$10^{44} \leqq 15^n < 10^{45}.$$

各辺の常用対数をとって，

$$44 \leqq n\log_{10}15 < 45. \qquad \cdots ①$$

ここで，

$$\begin{aligned}\log_{10}15 &= \log_{10}(3\cdot 5)\\ &= \log_{10}3+\log_{10}5\\ &= \log_{10}3+\log_{10}\frac{10}{2}\\ &= 0.4771+(1-0.3010)\\ &= 0.4771+0.6990\\ &= 1.1761.\end{aligned}$$

よって，① より，

$$\frac{44}{1.1761} \leqq n < \frac{45}{1.1761}.$$

$$37.41\cdots \leqq n < 38.26\cdots.$$

$$n=\mathbf{38}.$$

このとき，

$$\begin{aligned}\log_{10}15^{38} &= 38\times 1.1761\\ &= 44.6918,\end{aligned}$$

$$15^{38}=10^{44.6918}=10^{44}\cdot 10^{0.6918}. \qquad \cdots ②$$

ここで，

$$\log_{10}4 = 2\log_{10}2 = 0.6020,$$

$$\log_{10}5 = 0.6990$$

であり，

$$0.6020<0.6918<0.6990.$$

よって，② より，

$$10^{44}\cdot 10^{0.6020} < 15^{38} < 10^{44}\cdot 10^{0.6990}.$$

$$4\times 10^{44} < 15^{38} < 5\times 10^{44}.$$

ゆえに，15^{38} の最高位の数字は

$$\mathbf{4}.$$

(2) 小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れるとすると，

$$10^{-n} \leqq 15^{-20} < 10^{-n+1}.$$

各辺の常用対数をとると，

$$-n \leqq \log_{10} 15^{-20} < -n+1. \qquad \cdots ③$$

ここで，

$$\begin{aligned} \log_{10} 15^{-20} &= -20 \log_{10} 15 \\ &= -20 \times 1.1761 \\ &= -23.522. \qquad \cdots ④ \end{aligned}$$

よって，③ を満たす n は 24.

④ より，

$$\begin{aligned} 15^{-20} = 10^{-23.522} &= 10^{-24+0.4780} \\ &= 10^{-24} \cdot 10^{0.4780}. \end{aligned}$$

ここで，

$$10^{0.4771} < 10^{0.4780} < 10^{0.6020}.$$

$$3 < 10^{0.4780} < 4.$$

よって，

$$3 \cdot 10^{-24} < 15^{-20} < 4 \cdot 10^{-24}.$$

ゆえに，15^{-20} を小数で表したとき，

小数第 24 位に初めて 0 でない数字 **3** が現れる．